



**FUNDACIÓN DE  
ESTUDIOS FINANCIEROS**

# **Análisis de sensibilidad del capital regulatorio ante el fenómeno de la sobredispersión**

## ***Autores***

**José Manuel Feria-Domínguez, PhD.**

*Departamento de Economía Financiera y Contabilidad  
Universidad Pablo de Olavide, Sevilla, España  
jmferdom@upo.es*

**Enrique Jiménez-Rodríguez, PhD.**

*Departamento de Economía Financiera y Contabilidad  
Universidad Pablo de Olavide, Sevilla, España  
ejimenez@upo.es*

(\*) ESTE TRABAJO OBTUVO UN ACCESIT EN 2013

**PREMIOS INVESTIGACIÓN FEF 2013**

ISBN: 978-84-695-9747-7  
Depósito Legal: M-4772-2014  
Edita: Fundación Estudios Financieros



<b>RESUMEN</b> .....	5
<b>ABSTRACT</b> .....	5
<b>1. INTRODUCCIÓN</b> .....	6
<b>2. MARCO METODOLÓGICO</b> .....	9
<b>2.1. Modelización de la Frecuencia</b> .....	10
<b>2.2. Modelización de la Severidad</b> .....	10
<b>2.3. Bondad del Ajuste y Estimación de los Parámetros</b> .....	11
<b>2.4. Distribución de Pérdidas Agregadas</b> .....	12
<b>2.5. Valor en Riesgo Operacional</b> .....	12
<b>3. DATOS</b> .....	13
<b>4. RESULTADOS</b> .....	14
<b>5. CONSIDERACIONES FINALES</b> .....	20
<b>6. REFERENCIAS</b> .....	20
<b>APÉNDICE TÉCNICO</b> .....	23
<b>A.1. Distribuciones de Severidad</b> .....	23
<b>A.2. Distribuciones de Frecuencia</b> .....	24





### RESUMEN

El propósito de este trabajo es contrastar la naturaleza sobredispersa de las pérdidas operacionales, incorporando el efecto de la varianza extra-Poisson dentro del Modelo de Distribución de Pérdidas (Loss Distribution Approach, LDA) y contrastando su impacto potencial en el Capital en Riesgo (en adelante, CaR). A tal efecto, utilizamos la base de datos de pérdidas operacionales AlgoOpdata, del grupo Fitch-Algorithmics. Una vez identificado el fenómeno de la sobredispersión, demostramos que las mixturas Poisson-Gamma proporcionan un mejor ajuste que el modelo tradicional de Poisson. Así, el análisis realizado sobre el CaR evidencia la sensibilidad de éste al efecto de la sobredispersión; siendo especialmente significativa en los escenarios leptocúrticos. En consecuencia, la presencia de la varianza extra-Poisson debe ser considerada por las instituciones de crédito en el diseño de sus modelos internos de medición, así como por los supervisores a la hora de validarlos.

**PALABRAS CLAVE:** Gestión de Riesgos, Valor en Riesgo Operacional, Modelo de Distribución de Pérdidas, Mixtura Poisson-Gamma, Sobredispersión.

### ABSTRACT

The purpose of this paper is to contrast the overdispersed nature of operational losses, incorporating the effect of the extra-Poisson variance into the Loss Distribution Approach (LDA) variance as well as contrasting its potential impact on the Capital at Risk (CaR). To this end, we use the operational losses database AlgoOpdata, provided by Fitch-Algorithmics Group. Having identified the over-dispersion phenomenon, we show that the Poisson-Gamma mixtures provide with a better fit than the traditional Poisson model. Thus, the analysis conducted on CaR, highlights the sensitivity to the overdispersion effect, being particularly significant under leptokurtic scenarios. Consequently, the presence of extra-Poisson variance should be considered by financial



institutions when designing its internal measurement approaches, as well as supervisors at the time of validation.

**KEY WORDS:** Risk Management, Operational Value at Risk, Loss Distribution Approach, Compound Poisson-Gamma models and Over-Dispersion Phenomenon.

**Acknowledgements:** The authors are immensely grateful to Prof. Marcelo Cruz, New York Stern School of Business and Henry Penikas, Higher School of Economics (Russia) for their valuable contributions as well as the Scientific Committees of the 19<sup>th</sup> Multinational Finance Conference (MFC), Izmir, Turkey (2013) and the XIV Iberian-Italian Congress of Financial and Actuarial Mathematics (IBIT), Madrid (2013).

## 1. INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de Basilea III (2011a, 2013) es fortalecer la solidez y estabilidad del sistema financiero mediante una adecuada capitalización y reforzamiento de la liquidez de las entidades de crédito. En lo que al riesgo operacional se refiere, el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (BCBS, 2011b) propone una mayor convergencia en las metodologías de medición y gestión, así como, en la supervisión del mismo. En esta línea, el BCBS (2006) indica tres metodologías para calcular los requerimientos de capital por riesgo operacional que, de menor a mayor complejidad y sensibilidad al riesgo, son:

1. *Método del Indicador Básico:* Los bancos que utilicen este enfoque deberán cubrir el riesgo operacional con un capital propio equivalente a un porcentaje fijo (denotado como alfa) de la media de los Ingresos Brutos –como los define el BCBS (2006)– o Ingresos Relevantes (IR) –como los describe la Circular 3/2008 del Banco de España– anuales de los tres últimos ejercicios financieros.
2. *Método Estándar:* En este método la actividad bancaria se clasifica en ocho líneas de negocio (BCBS, 2006: Anexo 8). Los Ingresos Relevantes de cada línea se utilizan como indicador para reflejar la exposición al riesgo operacional del banco en dicha área. El capital requerido, en cada unidad de negocio, resultará del producto de los Ingresos Relevantes generados por un factor, denominado beta, que se asigna a cada una de las líneas. El total del capital regulatorio, a nivel de entidad, se obtendrá de la media de los tres últimos años del sumatorio de capital de cada una de las líneas.



3. *Metodologías de Medición Avanzada*: Como señala Jorion (2003), estas metodologías proporcionan un mejor entendimiento y una jerarquización más clara de las distintas fuentes de riesgo operacional. Si bien, las metodologías avanzadas son más sensibles al riesgo, éstas conllevan una implementación más costosa y compleja. En un sentido amplio, el BCBS (2001) distingue tres técnicas: el Modelo de Medición Interna (IMA), los Cuadros de Mando; y el Modelo de Distribución de Pérdidas (Loss Distribution Approach, LDA).

De entre los enfoques propuestos, el BCBS (2011b) sugiere, en particular, el LDA para estimar de manera eficiente los requerimientos de capital por riesgo operacional. Dicho modelo requiere la definición previa de dos variables: severidad y frecuencia. La severidad se define como una variable aleatoria continua que representa el impacto económico de la pérdida. La frecuencia es una variable aleatoria discreta que simboliza el número de eventos registrados durante un horizonte de riesgo (Alexander, 2007). A efectos regulatorios, dicho periodo se fija, para el riesgo operacional, en base anual (BCBS, 2006). Por consiguiente, si el capital regulatorio debe dar cobertura a las posibles pérdidas que pueda sufrir la entidad en el espacio temporal de un año, en el desarrollo del enfoque LDA es necesario modelizar la frecuencia anual.

En este sentido, tradicionalmente, la distribución de Poisson se considera un modelo de referencia para el recuento de los datos (véase Cameron y Trivedi, 1990). Esta función discreta asume equidispersión, es decir, que media y varianzas son iguales. Sin embargo, en el contexto del riesgo operacional, la varianza de la frecuencia, generalmente, excede la media; dando lugar al fenómeno conocido como sobredispersión o varianza extra-Poisson (véase McNeil et al., 2005; Dahen y Dionne, 2010). Por lo que, el uso de la Poisson podría subestimar la varianza muestral. En este escenario, supervisores y gestores de riesgo han de ser conscientes de las implicaciones de este fenómeno, a efectos de gestión, y de la necesidad de evaluar su impacto potencial en los requerimientos de capital por riesgo operacional.

Lindsey (1995) propone la simple aplicación de la *ratio Varianza-sobre-Media* como indicador de la sobredispersión. Posibles desviaciones sobre el valor uno de la ratio implicaría que la distribución empírica no sigue el modelo de Poisson, esto es: si la relación es mayor que uno, sobredispersión; o infradispersión, si dicha razón es inferior a la unidad. No obstante, la intensidad de los efectos de la dispersión dependerá de la magnitud de la ratio. En este sentido, Cameron y Trivedi (1998) establecen que: «*Si la varianza es superior al doble de la media muestral, entonces es muy probable la existencia de sobredispersión en los datos*». Existen metodologías alternativas para testar la



existencia de varianza extra-Poisson en la frecuencia (véase Hinde y Demetrio, 1998). Asimismo, Palmer et al. (2007) describen diferentes mecanismos de corrección para abordar el fenómeno de la sobredispersión.

En la literatura económica, la frecuencia del riesgo operacional se ha abordado desde diferentes puntos de vista. Cruz (2002), Panjer (2006) y Chernobai et al. (2007) proponen una gran variedad de modelos probabilísticos discretos, tales como: Poisson, Binomial Negativa, Binomial o Geométrica. Da Costa (2004) sugiere seguir una regla útil: optar por el modelo Binomial cuando la varianza sea menor que la media aritmética (infradispersión); por la de Poisson cuando ambos valores sean similares (equidispersión); y por la Binomial Negativa cuando la varianza sea mayor que la media (sobredispersión). Si bien, como señala Alexander (2007), la distribución Binomial ( $N, p$ ) sólo es aplicable asumiendo que la probabilidad,  $p$ , de que se materialice una de pérdida sea la misma para todos los eventos de una clase de riesgo determinada, los cuales –sin embargo– han de ser independientes entre sí. Aunque, la verdadera dificultad a la hora de seleccionar esta distribución estriba en la estimación consistente del parámetro  $N$ , ya que no siempre es posible establecer una *proxy* suficientemente representativa. Éste representa el número de eventos susceptibles de generar pérdidas operacionales; por ejemplo, para las pérdidas por «diferencias de caja»,  $N$  podría cuantificarse en función del «número de operaciones de ventanilla». En consecuencia, a efectos prácticos la Binomial queda descartada.

En esta línea, análisis empíricos como el de Moscadelli (2005) concluyen que el mejor ajuste viene proporcionado por la distribución Binomial Negativa. Asimismo, en ausencia de datos suficientes para realizar un análisis estadístico robusto, Dutta y Perry (2007) proponen la distribución de Poisson con un parámetro  $\lambda$  igual a la media aritmética de eventos anuales. Chapelle et al. (2008), que utilizan una frecuencia mensual, muestran también que la distribución Binomial Negativa proporciona un mejor ajuste que el modelo de Poisson.

Por otro lado, Aue y Kalkbrener (2006), Böcker y Klüppelberg (2005) y De Koker (2006) hacen hincapié en el mayor peso de la severidad con respecto a la distribución de frecuencia dentro del LDA. No obstante, esta menor ponderación de la frecuencia respecto de la severidad, no implica que su impacto en la estimación del CaR sea irrelevante, como apuntan Frachot et al. (2006). En base al contexto expuesto, el propósito de este trabajo se focaliza en: (i) testar la naturaleza sobredispersa de las pérdidas operacionales; (ii) capturar la varianza extra-Poisson en el LDA; y (iii) contrastar el grado de sensibilidad del CaR ante dicho fenómeno.



A tal efecto, comenzamos nuestro estudio realizando un análisis exploratorio sobre una muestra de pérdidas operacionales bancarias, extraídas de la base de datos externa Algo-Opdata de Algorithmics-Ficht. En segundo lugar, aplicamos la *ratio Varianza-sobre-Media* para detectar la existencia de sobredispersión. Testada dicha hipótesis, comparamos el modelo tradicional de Poisson con otras distribuciones alternativas de probabilidad, en particular, introducimos el modelo de Pôlya, no contrastado en la literatura previa. Finalmente, este trabajo contribuye a la discusión existente mediante la realización de un análisis de sensibilidad del CaR a la intensidad de la sobredispersión. Para ello, hemos seleccionado dos tipos de funciones de severidad sub-exponenciales: la Log-Normal, modelo propuesto por el BCBS (2001); y la Inversa Gaussiana, sugerida para ajustar distribuciones leptocúrticas (Panjer, 2006).

Los resultados de nuestro estudio revelan la presencia de varianza extra-Poisson en los eventos de riesgo operacional analizados. Asimismo, advertimos que los modelos mixtos Poisson-Gamma introducen mayor flexibilidad frente al enfoque tradicional de Poisson. Ignorar la naturaleza sobredispersa de las pérdidas operacionales conlleva, de manera implícita, una infraestimación de los requerimientos de capital y, consecuentemente, incurrir en un riesgo de modelo.

El trabajo está estructurado como sigue: en el apartado 2, se desarrolla el proceso metodológico del LDA para obtener el CaR; en el apartado 3, seleccionamos y describimos la muestra de datos utilizada; en el apartado 4, presentamos los resultados obtenidos; y en la última sección, exponemos las conclusiones de nuestro estudio.

## 2. MARCO METODOLÓGICO

El LDA es una técnica actuarial (véase Bühlmann, 1970), cuyo desarrollo es descrito teóricamente por Frachot et al. (2006) y, empíricamente, por Aue y Kalkbrener (2006) para la industria bancaria. El LDA tiene como objetivo obtener la distribución de pérdidas agregadas a partir de la convolución de la severidad y la frecuencia. El concepto de Valor en Riesgo se aplica a dicha distribución dando lugar al Valor en Riesgo Operacional (OpVaR, *Operational Value at Risk*). Esta medida estadística, que representa el percentil 99,9 por ciento de la citada distribución, indica la máxima pérdida potencial que una entidad de crédito podría incurrir dentro del horizonte de riesgo. Matemáticamente, las pérdidas agregadas se denotan como una suma,  $S$ , asociada a un conjunto de  $N$  observaciones de pérdidas,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , siendo:



$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

donde  $X_i$  son valores aleatorios, independientes e idénticamente distribuidos, que describen la severidad, representando  $N$  el número de eventos en el intervalo de tiempo  $[0, t]$ , es decir, la frecuencia. Suponiendo que la severidad y la frecuencia son independientes, entre sí, la distribución de pérdidas agregadas se define como:

$$S = \sum_{t=1}^{N(t)} X_i t \geq 0 \quad (2)$$

## 2.1. Modelización de la Frecuencia

Según autores como Frachot et al. (2006), Chernobai et al. (2005), o Mignola y Ugocioni (2006), la distribución de Poisson –utilizada recurrentemente en las técnicas actuariales de seguros– es una candidata con muchas ventajas a la hora de modelizar la frecuencia. Dicha función está caracterizada por un único parámetro *lambda* ( $\lambda$ ) que representa el número de sucesos ocurridos en un año. Si bien, para analizar el efecto potencial de la sobredispersión hemos de considerar otras funciones de probabilidad alternativas<sup>1</sup>. En la práctica, una forma para capturar la variabilidad extra-Poisson consiste en suponer que el parámetro *lambda* de Poisson es una variable aleatoria –y no una constante– que sigue un cierto modelo probabilístico, por ejemplo, una distribución Gamma. Como resultado, obtenemos una mixtura Poisson-Gamma, materializada en distribuciones de probabilidad como la Binomial Negativa o la Pólya. En esencia, ésta última, se considera una distribución Binomial Negativa generalizada (véase Hilbe, 2011). Al tratarse de distribuciones biparamétricas, estos modelos introducen cierta flexibilidad adicional en comparación con el de Poisson.

## 2.2. Modelización de la Severidad

Como apuntan Chernobai et al. (2005), la distribución de severidad se caracteriza por un exceso de curtosis y una asimetría positiva. En este sentido, Embrechts et al. (2003), sugiere la utilización de distribuciones sub-exponenciales en lugar de utilizar las distri-

---

<sup>1</sup> Véase Apéndice Técnico A.1.



buciones empíricas para estimar las colas. Las distribuciones sub-exponenciales son aquellas cuya cola decae de manera más lenta que la cola de la distribución exponencial y, por ende, describen mucho mejor la forma de los datos en el extremo, permitiendo que las estimaciones de los parámetros no dependan de momentos estadísticos de orden superior. En este sentido, un compendio de funciones sub-exponenciales podrían ser utilizadas para modelizar la severidad, tales como: Log-Normal, Burr, Pareto, Weibull e Inversa Gaussiana (véase Panjer, 2006).

Para aislar el fenómeno de la sobredispersión asumimos la distribución de severidad *ceteris paribus* en el desarrollo del LDA<sup>2</sup>. Siguiendo las sugerencias de BCBS (2001), utilizamos el modelo Log-Normal (LN) y además, debido al comportamiento leptocúrtico de los datos muestrales, incluimos un modelo probabilístico alternativo como es la distribución Inversa Gaussiana (IG) (véase Cruz, 2002).

### 2.3. Bondad del Ajuste y Estimación de los Parámetros

Los parámetros son estimados por máxima verosimilitud (MLE), asimismo, el Criterio de Información Bayesiano (BIC) y el Criterio de Información de Akaike (AIC) son los estadísticos utilizados para la calibrar la bondad del ajuste de las funciones seleccionadas (véase Schwarz, 1978; Akaike, 1974 y 1976). El razonamiento que subyace detrás de los criterios BIC y AIC es el siguiente: *el modelo que mejor ajusta es aquél que explica los datos con el menor número de parámetros libres*. Así pues, el valor más pequeño en ambos criterios indica el mejor modelo.

$$\text{BIC} = \text{Ln} [n] k - 2\text{Ln} [L_{\max}] \quad (3)$$

$$\text{AIC} = (2n / (n - k - 1)) k - 2\text{Ln} [L_{\max}] \quad (4)$$

donde  $n$  es el número de observaciones,  $k$  representa el número de parámetros a estimar y  $L_{\max}$  es el valor maximizado del logaritmo de la función de verosimilitud. Los coeficientes para  $k$ , en la primera parte de cada expresión, muestran el grado en cual el número de los parámetros está siendo penalizado. Para  $n > \sim 20$  el BIC es más estricta a la hora de penalizar la pérdida de grados de libertad teniendo más parámetros en el modelo ajustado, mientras que para  $n > \sim 40$  el AIC es el menos estricto.

---

<sup>2</sup> Véase Apéndice Técnico A.2.



## 2.4. Distribución de Pérdidas Agregadas

Una vez que las distribuciones de severidad y frecuencia han sido caracterizadas por separado, el último paso del proceso metodológico consiste en la obtención de una tercera distribución, esto es, la distribución agregada:

$$f_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_x^{*n}(x) \quad (5)$$

La función de pérdidas agregada  $f_s(x)$ , se obtiene por convolución. Este procedimiento matemático transforma las distribuciones de frecuencia y severidad en una tercera, mediante la superposición de ambas (Feller, 1971). Para la estimación de la función de pérdidas agregada, Klugman *et al* (2004) proponen las siguientes técnicas: la Transformada Rápida de *Fourier* (*Fast Fourier Transform*, FFT); el Algoritmo Recursivo de *Panjer* (1981); y el enfoque de Simulación por Monte-Carlo. En este trabajo, hemos llevado a cabo la transformación rápida de *Fourier* (véase Schaller y Temnov, 2008). Derivado del campo de procesamiento de señales, el algoritmo FFT determina la distribución agregada mediante la inversión de la función característica (Brigham, 1974; Robertson, 1992). Además de su facilidad de implementación, trabaja con distintas distribuciones de frecuencias, como en nuestro caso.

## 2.5. Valor en Riesgo Operacional

Una vez determinada la función de distribución agregada, para el cálculo del capital regulatorio vinculado a cada casilla, basta aplicar el concepto de Valor en Riesgo Operacional (OpVaR), es decir, calcular el percentil del 99,9% de dicha distribución. En sentido estricto, –según advierte el Comité (2006)– el capital regulatorio debería cubrir, a priori, sólo la pérdida no esperada (UL), esto es:

$$CaR(\alpha) \equiv UL(\alpha) = f_s^{-1}(\alpha) - E[S] \quad (6)$$

No obstante, si la entidad no demuestra de forma oportuna la cobertura de la pérdida esperada, el capital debería contemplar entonces ambas partidas para su cómputo, de ahí la identidad entre CaR y OpVaR:



$$OpVaR \equiv CaR(\alpha) = f_s^{-1}(\alpha) = E[S] + UL(\alpha) \quad (7)$$

La pérdida esperada podemos definirla, matemáticamente, como:

$$EL = E[S] = \int_0^{\infty} xdf(x) = E[S]xE[N] \quad (8)$$

Análogamente, la pérdida no esperada se expresaría de la siguiente forma:

$$UL(\alpha) = f_s^{-1}(\alpha) = E[S] = \inf\{x | f(x) \geq \alpha\} - \int_0^{\infty} xdf(x) \quad (9)$$

### 3. DATOS

Para llevar a cabo este estudio utilizamos la base de datos de pérdidas operacionales AlgoOpdata, comercializada por Algorithmics-Fitch. Dicha base de datos contiene eventos de riesgo operacional, a nivel internacional, comprendidos entre 1972 y 2009, clasificados atendiendo a los criterios del BCBS (2006: Anexo 9). Los eventos recopilados provienen de distintos tipos de fuentes, incluyendo: documentos judiciales, legales, empresariales, informes de consultoría y publicaciones de negocios. Para registrar un evento en AlgoOpData, la pérdida debe ser cuantificable y el umbral mínimo de recopilación se fija en un millón de dólares – o su equivalente en otra divisa – en el momento en que la pérdida se hace pública. Asimismo, se considera la tasa de inflación, concretamente, el Índice de Precios al Consumo Americano, para garantizar la comparación homogéneas de las pérdidas.

En este trabajo, nos centramos, exclusivamente, en el sector de los servicios financieros. En particular, seleccionamos una ventana temporal que va desde 1994 a 2009, ya que la frecuencia del período anterior no es estadísticamente significativa. En resumen, nuestra muestra se compone de 3.959 eventos de riesgo operacional. Con objeto de testar la naturaleza sobredispersa de las pérdidas, el primer paso es estimar la media y la varianza de la distribución de frecuencias para cada tipo de evento, sobre una base anual. De la observación de la tabla 1, se desprende que la razón de la *Varianza-sobre-Media* (*VtM*) es superior a la unidad en todos los tipos de eventos. Si bien, de acuerdo con Cameron y Trivedi (1998), el exceso de dispersión se considera notable en aquella tipología de eventos donde la varianza representa más del doble de la media. Siguiendo esta regla, el ET1 no quedaría clasificado como sobredisperso.

Por otro lado, según McNeil y Saladin (1997) y Embrechts et al. (2003), bajo el enfoque LDA, debemos garantizar la existencia de al menos 25 observaciones para obtener



robustez estadística; por debajo de este umbral, los resultados obtenidos podrían no ser fiables. Aunque un tamaño muestral óptimo podría rondar los 200 eventos, utilizando entre 50 y 100 observaciones podríamos llegar a situaciones realistas. En consecuencia, ya que tenemos sólo 16 observaciones en Daños a Activos Físicos (ET3) hemos descartado este tipo de eventos en el proceso de estimación del CaR.

**TABLA 1. MOMENTOS ESTADÍSTICOS EMPÍRICOS**

Cód.	Tipo de Evento	N	Mediana	Media	Varianza	Ratio <i>VtM</i>
ET1	Fallos en los Sistemas	26	1	1.625	2.117	1.303
ET2	Clientes, Productos y Prácticas de Negocio	1,708	106	106.750	851.670	7.978
ET3	Daños a Activos Físicos	16	0	1.070	3.467	3.240
ET4	Prácticas de Empleo y Seguridad en el Trabajo	177	11	11.063	34.196	3.091
ET5	Ejecución, Suministro y Gestión de Procesos	350	22	21.875	86.517	3.955
ET6	Fraude Externo	556	34	34.75	307.13	8.838
ET7	Fraude Interno	1,136	78	71	314.8	4.434

#### 4. RESULTADOS

Una vez que el exceso de dispersión ha sido identificado, el siguiente paso es analizar su impacto potencial en el enfoque LDA, y consecuentemente, en el CaR. Para ello, aplicamos los distintos modelos probabilísticos señalados en la sección 2 y descritos en el apéndice, para cada tipo de evento.

En la tabla 2, podemos observar cómo las mixturas Poisson-Gamma proporcionan la mejor bondad de ajuste en la mayoría de los eventos operacionales analizados. Por otro lado, para el evento ET1, caracterizado por una menor sobredispersión, la distribución de Poisson es la mejor candidata de acuerdo con los criterios BIC y AIC, respectivamente.



TABLA 2. BONDAD DEL AJUSTE DE LA FRECUENCIA

	Poisson		Binomial-Neg		Pôlya	
	BIC	AIC	BIC	AIC	BIC	AIC
ET1	56.57	56.09	58.99	58.28	58.90	58.36
ET2	223.73	223.24	157.00	156.38	156.96	156.34
ET4	118.92	118.44	106.74	106.11	106.46	105.84
ET5	141.72	141.23	121.54	120.92	121.44	120.82
ET6	215.94	215.45	139.15	138.53	139.03	138.41
ET7	166.91	166.43	141.66	141.04	141.66	141.04

TABLA 3. MOMENTOS ESTADÍSTICOS TEÓRICOS

	Modelo	Media	Varianza	Asimetría	Curtosis
ET1	Poisson	1.625	1.625	0.784	3.615
	Binomial-Neg	1.520	1.982	1.142	4.705
	Pôlya	1.625	2.119	1.105	4.594
ET2	Poisson	106.750	106.750	0.097	3.009
	Binomial-Neg	108.130	795.960	0.486	3.354
	Pôlya	106.750	785.770	0.490	3.359
ET4	Poisson	11.063	11.063	0.301	3.090
	Binomial-Neg	11.848	39.920	0.908	4.225
	Pôlya	11.062	37.275	0.940	4.312
ET5	Poisson	21.875	21.875	0.214	3.046
	Binomial-Neg	21.144	85.012	0.764	3.869
	Pôlya	21.875	87.951	0.751	3.840
ET6	Poisson	34.750	34.750	0.170	3.029
	Binomial-Neg	36.153	297.560	0.896	4.203
	Pôlya	34.750	286.01	0.914	4.252
ET7	Poisson	71.000	71.000	0.119	3.014
	Binomial-Neg	70.889	299.31	0.430	3.276
	Pôlya	71.000	299.78	0.430	3.276

En la tabla 3, se presentan los momentos teóricos cada modelo seleccionado. En general, la función Binomial Negativa y la de Pôlya, además de ser adecuadas para capturar el fenómeno extra-Poisson, son más sensibles a la asimetría y curtosis de la distribución



de frecuencia. Por otra parte, a partir de los parámetros resultantes, se han representado, para cada uno de los tipos de riesgo y las tres distribuciones seleccionadas, sus correspondientes histogramas (véanse las figuras 1 a 6). Al contrastar el histograma de la distribución de Poisson, con los correspondientes a los modelos alternativos, podemos inferir visualmente no sólo la mayor varianza subyacente en este tipo de distribuciones, sino también un mayor nivel de asimetría y curtosis, descrito por sus momentos teóricos.

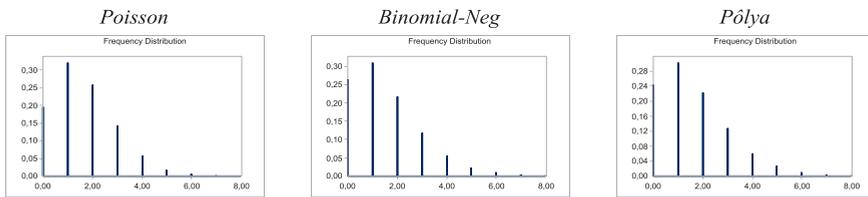


Fig. 1: ET1

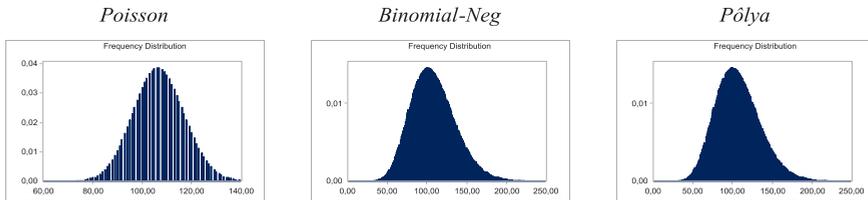


Fig. 2: ET2

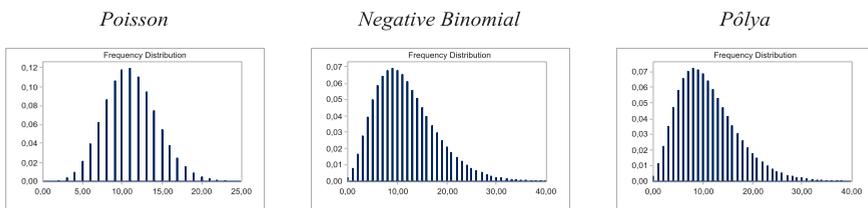


Fig. 3: ET4

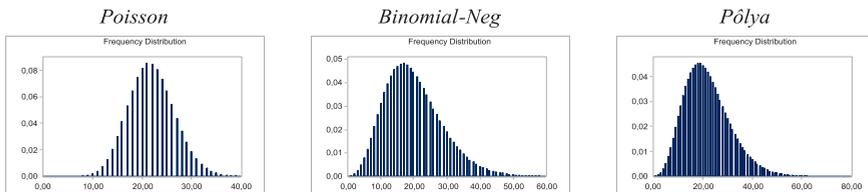


Fig. 4: ET5

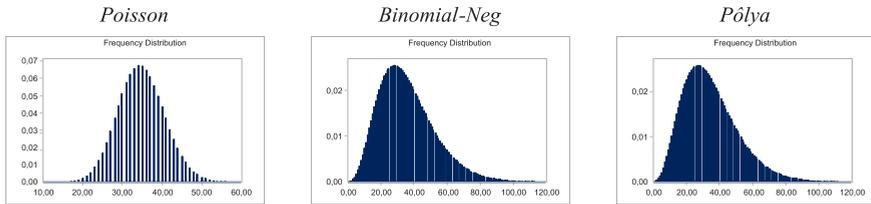


Fig. 5: ET6

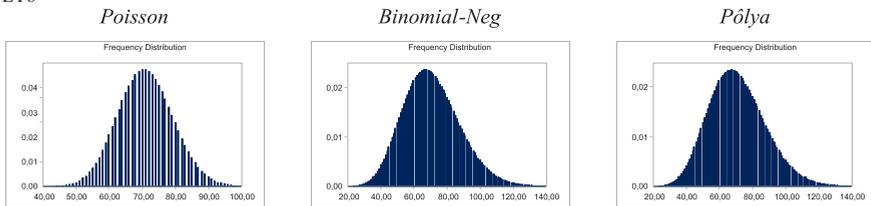


Fig. 6: ET7

Con el fin de aislar el impacto de la sobredispersión en el CaR, hemos considerado *ceteris paribus* la distribución Log-Normal para la severidad, que se combina con los modelos de frecuencia mencionados anteriormente. Por otra parte, enriquecemos nuestro análisis mediante la repetición de esta misma secuencia, esta vez utilizando la distribución Inversa Gaussiana ya que la muestra es leptocúrtica. La tabla 4 ilustra cómo la función Inversa Gaussiana mejora el ajuste proporcionado por el modelo Log-Normal, para todos los tipos de eventos.

**TABLA 4. BONDAD DEL AJUSTE DE LA SEVERIDAD**

	Log-Normal		Inv-Gausiana	
	BIC	AIC	BIC	AIC
ET1	248.72	246.73	242.74	240.75
ET2	16133.40	16122.51	15901.37	15890.48
ET4	1317.88	1311.59	1289.09	1282.80
ET5	2853.13	2845.45	2792.25	2784.57
ET6	4890.12	4881.50	4795.54	4869.27
ET7	10591.50	10581.43	10396.12	10386.06

En las tablas 5 y 6 se muestran los resultados del análisis de sensibilidad. En relación al tipo de evento ET1, si comparamos el modelo Poisson con las mixturas Poisson-



Gamma para ambas funciones de severidad, los CaR resultantes se mantienen estables. Esto es debido a la naturaleza equidispersa de esta tipología (ver tabla 1). Y es que, en este caso particular, la distribución de Poisson ofrece un mejor ajuste estadístico. Para los 5 tipos de eventos restantes, los resultados en términos de CaR confirman su sensibilidad a la existencia de varianza extra-Poisson, capturada por los modelos compuestos Poisson-Gamma. Cuando el proceso de convolución se realiza utilizando el modelo Log-Normal, la media de la frecuencia juega un papel importante a medida que nos aproximamos a la cola de la distribución de pérdidas agregadas, afectando a la UL en consecuencia. El efecto sobredispersión se materializa en un aumento que oscila entre 1,45 % y 8,23 %, para la Binomial Negativa, y de 1,46 % a 24,76 % para el modelo Pôlya. Bajo el escenario de la Inversa Gausiana, el CaR resultante parece ser aún más sensible a la sobredispersión; tales aumentos varían de 2,26 % a 21,66 %, para la Binomial Negativa, y de 2,36 % a 21,22 %, para el modelo Pôlya .

**TABLA 5. ESTIMACIONES DEL CaR CON LA FUNCIÓN LOG-NORMAL**

Severidad	Frecuencia	EL	OpVaR <sub>99,9</sub>	UL	ΔUL (%)
<b>ET1</b>					
Log-Normal (2.672; 1.763)	Poisson (1.625)	105.63	3,021.87	2,916.24	-
	Binomial-Neg (5; 0.767)	98.7	2,983.13	2,884.43	-1.09
	Pôlya (5.345; 0.304)	105.56	3,035.51	2,929.95	0.47
<b>ET2</b>					
Log-Normal (2.725; 1.776)	Poisson (106.8)	12,498.00	45,823.20	33,325.20	-
	Binomial-Neg (17; 0.136)	12,658.00	47,351.10	34,693.10	4.10
	Pôlya (16.8; 6.361)	12,497.00	47,092.70	34,595.70	3.81
<b>ET4</b>					
Log-Normal (1.971; 1.354)	Poisson (11.1)	199.76	1,303.71	1,103.95	-
	Binomial-Neg (5; 0.297)	212.9	1,407.73	1,194.83	8.23
	Pôlya (4.669; 2.370)	199.07	1,174.87	1,373.94	24.46
<b>ET5</b>					
Log-Normal (2.165; 1.607)	Poisson (21.9)	760.87	5,217.46	4,456.59	-
	Binomial-Neg (7; 0.249)	733.39	5,289.55	4,556.16	2.23
	Pôlya (7.242; 3.021)	759.95	5,360.44	4,600.49	3.23
<b>ET6</b>					
Log-Normal (2.458; 1.663)	Poisson (34.8)	1,898.00	10,942.00	9,044.00	-
	Binomial-Neg (5; 0.122)	1,973.70	11,695.50	9,721.80	7.49
	Pôlya (22; 0.237)	1,897.20	11,530.10	9,632.90	6.51



**TABLA 5. ESTIMACIONES DEL CaR CON LA FUNCIÓN LOG-NORMAL  
(Continuación)**

<b>ET7</b>					
Log-Normal (2.653; 1.791)	Poisson (71)	6,636.80	27,665.80	21,029.00	-
	Binomial-Neg (22; 0.237)	6,624.10	27,958.60	21,334.50	1.45
	Pôlya (22; 3.222)	6,634.50	27,970.00	21,335.50	1.46

**TABLA 6. ESTIMACIONES DEL CaR CON LA FUNCIÓN INVERSA  
GAUSIANA**

Severidad	Frecuencia	EL	OpVaR <sub>99,9</sub>	UL	Δ UL (%)
<b>ET1</b>					
Inv-Gausiana (64.24; 5.85)	Poisson (1.625)	93.40	1,873.26	1,779.86	-
	Binomial-Neg (5; 0.767)	87.22	1,865.71	1,778.49	-0.08
	Pôlya (5.345; 0.304)	93.16	1,877.48	1,784.32	-0.25
<b>ET2</b>					
Inv-Gausiana (101.69; 5.54)	Poisson (106.8)	19,831.00	47,794.80	27,963.80	-
	Binomial-Neg (17; 0.136)	20,083.00	54,102.50	34,019.50	21.66
	Pôlya (16.8; 6.361)	19,827.00	53,723.90	33,896.90	21.22
<b>ET4</b>					
Inv-Gausiana (20.37; 4.60)	Poisson (11.1)	225.32	1,124.64	899.32	-
	Binomial-Neg (5; 0.297)	241.29	1,307.22	1,065.93	18.53
	Pôlya (4.669; 2.370)	225.30	1,270.67	1,045.37	16.24
<b>ET5</b>					
Inv-Gausiana (84.88; 4.02)	Poisson (21.9)	2,253.90	14,493.20	12,239.30	-
	Binomial-Neg (7; 0.249)	2,174.90	14,690.40	12,515.50	2.26
	Pôlya (7.242; 3.021)	2,249.30	14,777.60	12,528.30	2.36
<b>ET6</b>					
Inv-Gausiana (117.49; 5.00)	Poisson (34.8)	5,820.60	28,591.10	22,770.50	-
	Binomial-Neg (5; 0.122)	6,028.30	30,300.40	24,272.10	6.59
	Pôlya (22; 0.237)	5,797.80	30,090.00	24,292.20	6.68
<b>ET7</b>					
Inv-Gausiana (157.15; 5.25)	Poisson (71)	28,313.00	86,442.80	58,129.80	-
	Binomial-Neg (22; 0.237)	28,268.00	91,444.80	63,176.80	8.68
	Pôlya (22; 3.222)	28,312.00	91,520.30	63,208.30	8.74



## 5. CONSIDERACIONES FINALES

La distribución de Poisson, modelo utilizado tradicionalmente para el recuento de datos, asume equidispersión, esto es, media y varianza son iguales. Si bien, en el contexto del riesgo operacional, esta suposición no se sostiene. Así pues, la aplicación del test de Lindsey (1995) sobre la muestra seleccionada, pone de manifiesto que la varianza observada supera la media en todos los tipos de eventos operacionales. No obstante, debemos resaltar que para la categoría de riesgos operacionales por fallos en los sistemas (ET1), el grado de sobredispersión no alcanza el umbral establecido por Cameron y Trivedi (1998). Consecuentemente, al evaluar la bondad del ajuste de la frecuencia, advertimos que para ET1 la función de Poisson es la más adecuada. Para el resto de riesgos operacionales, donde se supera dicho umbral, los criterios BIC y AIC, señalan a los modelos alternativos, Binomial Negativa y Pôlya, como mejores candidatos en relación al de Poisson.

Por último, con el propósito de contrastar el impacto real de la sobredispersión de la frecuencia en el CaR, desarrollamos un análisis de sensibilidad sobre el modelo LDA. Así, hemos mantenido *ceteris paribus* la función de severidad, con objeto de aislar el fenómeno extra-Poisson. En este sentido, tanto para el caso de la distribución Log-Normal –modelo sub-exponencial de referencia sugerido por el BCBS (2001)–, como para la Inversa Gausiana –función de cola pesada–, observamos un impacto notable de dicho fenómeno en el CaR estimado. Nótese que dicho efecto es especialmente sensible al grado de leptocurtosis del modelo.

Llegados a este punto, no incorporar el efecto de la sobredispersión de la frecuencia de las pérdidas operacionales en el modelo LDA, puede conllevar una infraestimación del riesgo y, por ende, de los requerimientos de capital. En consecuencia, las instituciones financieras deben tener en cuenta este aspecto en el diseño de sus modelos internos de medición, así como los supervisores en la validación de los mismos.

## 6. REFERENCIAS

- ALEXANDER, C., 2007. Valor en Riesgo Operacional. En: Fernández-Laviada, A. ed.: *La Gestión del Riesgo Operacional: de la Teoría a su Aplicación*. Madrid: Ediciones 2010.
- AKAIKE, H., 1974. A new look at the statistical model identification. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 19(6), 716-723.



1976. An information criterion (AIC). *Math Sci*, 14(153), 5-9.
- AUE, F., KALKBRENER, M., 2006. LDA at Work: Deutsche Bank's Approach to Quantifying Operational Risk. *Journal of Operational Risk*, 1(4), 49–93.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, 2001. Regulatory Treatment of Operational Risk. BCBS Working Papers No. 8, Basel.
2006. Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework – Comprehensive Version.
- 2011a. Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems-revised version. Document No. 189, Basel.
- 2011b. Operational Risk – Supervisory Guidelines for the Advanced Measurement Approaches – final document. Document No. 196. Basel.
- BÖCKER, K., KLÜPPELBERG, C. (2005). Operational VaR: a Closed-Form Approximation. *Risk*, 18 (12), 90-93.
- BRIGHAM, E. (1974). 0. 1974. The fast Fourier transform. *Englewood Cliffs. New Jersey. 252pp.*
- BÜHLMANN, H., 1970. *Mathematical Methods in Risk Theory*. New York: Springer-Verlag.
- CAMERON, C., TRIVEDI, 1990. Regression-based tests for overdispersion in the Poisson model. *Journal of Econometrics*, 46 (3), 347-364.
1998. *Regression Analysis of Count Data*. Cambridge: Cambridge University Press.
- CHAPELLE, A., CRAMA, Y., HUBNER, G., PETERS, J.P., 2008. Practical Methods for Measuring and Managing Operational Risk in the Financial Sector: A Clinical Study. *Journal of Banking and Finance*, 32 (6), 1049-1061.
- CHERNOBAI, A., RACHEV, S. T. and FABOZZI, F. J., 2005. Composite goodness-of-fit tests for left-truncated loss samples. Technical Report, University of California, Santa Barbara.
- CHERNOBAI, A., RACHEV, S.T. and FABOZZI, F.J., 2007. *Operational risk: A guide to Basel II capital requirements, models, and analysis*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- CRUZ, M., 2002. *Modeling, Measuring and Hedging Operational Risk*. John Wiley & Sons, Inc.



- DA COSTA, L., 2004. *Operational Risk with Excel and VBA*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- DAHEN, H., DIONNE, G., 2010. Scaling models for the severity and frequency of external operational loss data. *Journal of Banking & Finance*, 34 (7), 1484-1496.
- DE KOKER, R., 2006. Operational Risk Modelling: Where do we go from here? In E. Davis (Ed.), *The Advanced Measurement Approach to Operational Risk*, 37-58, London: Risk Books.
- DUTTA, K., PERRY, J., 2007. A Tale of Tails: An Empirical Analysis of Loss Distribution Models for Estimating Operational. Working Paper, FRB of Boston, Paper No. 06-13. Available from: <http://www.bos.frb.org/economic/wp/wp2006/wp0613app.pdf>
- EMBRECHTS, P., FURRER, H., KAUFMANN, R., 2003. Quantifying Regulatory Capital for Operational Risk. *Derivatives Use, Trading & Regulation*, 9 (3), 217-233.
- EMBRECHTS, P., GOLDIE, C., VERAVERBEKE, N., 1979. Subexponentiality and infinite divisibility. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 49, 335-347.
- EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C., MIKOSCH, T. 2003. *Modelling Extremal Events: for Insurance and Finance (Stochastic Modelling and Applied Probability)*. Berlin: Springer.
- FELLER, W., 1971. *An introduction to probability theory and its applications*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- FRACHOT, A., MOUDOLAUD, O., RONCALLI, T., 2006. Loss Distribution Approach in Practice. In M. Ong (Ed.), *The Basel Handbook: A Guide for Financial Practitioners*, London: Risk Books.
- HÄGER, D. & ANDERSEN, L.B. 2010. A knowledge based approach to loss severity assessment in financial institutions using Bayesian networks and loss determinants. *European Journal of Operational Research*, 207, 1635-1644.
- HILBE, J.M., 2011. *Negative Binomial Regression*. Cambridge: Cambridge University Press.
- HINDE, J., DEMETRIO, C., 1998. Overdispersion: models and estimation. *Computational Statistics and Data Analysis*, 27, 151-170.
- JORION, P., 2003. *Financial risk manager handbook*. New York: Wiley.
- KLUGMAN, S. A., PANJER, H. H., & WILLMOT, G. E. (2004). *Loss Models From Data to Decision*, A John Wiley & Sons, Inc., Publication.



- LINDSEY, J.K., 1995. *Modelling frequency and count data*. Oxford: Clarendon.
- MCNEIL A.J., FREY, R., EMBRECHTS, P. 2005. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. New Jersey: Princeton University Press.
- MCNEIL, A. & SALADIN, T., 1997. The Peaks Over Thresholds Method for Estimating High Quantiles of Loss Distributions. *Proceedings of 28th International ASTIN Colloquium, Australia*, 23-43.
- MIGNOLA, G. and UGOCCIONI, R. (2006). Sources of uncertainty in modelling operational risk losses. *Journal of Operational Risk*, 1(2), 33-50.
- MOSCADELLI, M. 2005. The Modelling of Operational Risk: Experience with the Analysis of the Data Collected by the Basel Committee. In E. Davis (Ed.), *Operational Risk: Practical Approaches to Implementation*, 39-104. London: Risk Books.
- PALMER, A., LOSILLA, J. M., VIVES, J., JIMÉNEZ, R., 2007. Overdispersion in the Poisson regression model: A comparative simulation study. *Methodology: European Journal of Research Methods for the Behavioral and Social Sciences*, 3(3), 89-99.
- PANJER H., 2006. *Operational Risk: Modeling Analytics*. New Jersey: John Wiley & Son.
- ROBERTSON, J. P., 1992. The computation of aggregate loss distributions. In *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* (Vol. 79, pp. 57-133).
- SCHALLER, P., TEMNOV, G. 2008. Efficient and precise computation of convolutions: Applying FFT to heavy tailed distributions. *Computational methods in applied mathematics*, 8, 187-200.
- SCHWARZ, G. E. 1978. Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, 6 (2), 461-464.

## APÉNDICE TÉCNICO

### A1. Distribuciones de Severidad

- Log-Normal (LN):

$$X \sim LN(\mu, \sigma) \rightarrow f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad \mu \in \mathfrak{R}, \sigma > 0 \quad (A1)$$



- Inverse Gaussian (IG)

$$X \sim IG(\mu, \theta) \rightarrow f(x) = \left( \frac{\theta}{2\pi x^3} \right)^{1/2} \exp\left( -\frac{\theta}{2\pi} \left( \frac{x-\mu}{\mu} \right)^2 \right) \quad \mu > 0, \theta > 0 \quad (\text{A2})$$

## A2. Distribuciones de Frecuencia

- Poisson (Po)

$$N \sim Po(\lambda) \rightarrow P(N = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \lambda > 0, k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A3})$$

donde, media y varianza son, respectivamente:

$$E(N) = \lambda \quad (\text{A4})$$

$$\text{Var}(N) = \lambda \quad (\text{A5})$$

- Binomial Negativa (BN)

$$E(N) = \frac{r(1-p)}{p} \quad (\text{A6})$$

donde, media y varianza son, respectivamente:

$$E(N) = \frac{r(1-p)}{p} \quad (\text{A7})$$

$$\text{Var}(N) = \frac{r(1-p)}{p^2} \quad (\text{A8})$$

- Pólya (Pol)

$$N \sim Po(\alpha, \beta) \rightarrow P(N = x) = \frac{\Gamma(\alpha + x)\beta^\alpha}{\Gamma(x+1)\Gamma(\alpha)(1+\beta)^{\alpha+\beta}} \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (\text{A9})$$



donde, media y varianza son, respectivamente:

$$E(N) = \alpha\beta \quad (A10)$$

$$\text{Var}(N) = \alpha\beta(1 + \beta) \quad (A11)$$

